

АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

«Вейвлет-анализ»

Дисциплина «Вейвлет-анализ» является частью программы магистратуры «Математическое моделирование физико-механических процессов» по направлению «01.04.02 Прикладная математика и информатика».

Цели и задачи дисциплины

Цель курса состоит в знакомстве с основами нового направления прикладной математики – вейвлет-анализа, находящего эффективное применение в математике, механике, физике, компьютерных и телекоммуникационных технологиях. Задачи дисциплины В результате изучения дисциплины обучающийся должен знать: - три основных направления теории вейвлетов: непрерывного вейвлет-преобразование, дискретное вейвлет-преобразования (вейвлет-базисы) и численные методы (в частности, решение дифференциальных уравнений в частных производных); уметь: - использовать методы вейвлет-анализа для анализа и численного моделирования систем и процессов; владеть: - навыками применения методов и алгоритмов вейвлет-анализа к различным задачам механики и математической физики, анализа сигналов и изображений, а также сжатия информации..

Изучаемые объекты дисциплины

Предметом освоения дисциплины являются следующие объекты: • основные понятия и определения теории вейвлет-анализа; • математические основы непрерывного и дискретного вейвлет-преобразования; • численные алгоритмы непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований; • методы анализа временных сигналов и пространственных полей различной природы; • методы сжатия информации; • методы фильтрации и удаления шума; • численные методы и компьютерные алгоритмы решения дифференциальных уравнений в частных производных; • методы построения вейвлетов, адаптированных тем или иным образом к решаемым задачам..

Объем и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		1	
1. Проведение учебных занятий (включая проведение текущего контроля успеваемости) в форме:	36	36	
1.1. Контактная аудиторная работа, из них:			
- лекции (Л)			
- лабораторные работы (ЛР)			
- практические занятия, семинары и (или) другие виды занятий семинарского типа (ПЗ)	34	34	
- контроль самостоятельной работы (КСР)	2	2	
- контрольная работа			
1.2. Самостоятельная работа студентов (СРС)	72	72	
2. Промежуточная аттестация			
Экзамен			
Дифференцированный зачет			
Зачет	9	9	
Курсовой проект (КП)			
Курсовая работа (КР)	18	18	
Общая трудоемкость дисциплины	108	108	

Краткое содержание дисциплины

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
1-й семестр				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
Непрерывное вейвлет-преобразование	0	0	12	17
<p>Тема 1. Стационарные и нестационарные сигналы. Возможности и недостатки преобразования Фурье и оконного преобразования Фурье при анализе нестационарных сигналов. Принцип неопределенности и частотно-временная локализация функций.</p> <p>Тема 2. Основные определения. Параметризация вейвлета. Сохранение L^2-нормы. Условие допустимости. Изменение частотно-временной локализации вейвлета при изменении параметров.</p> <p>Тема 3. Формулы анализа и синтеза. Формулы анализа и синтеза в общем случае. Формулы анализа и синтеза в пространстве Фурье. Формулы синтеза в случае рассмотрения только положительных масштабов. Формула восстановления для действительных и прогрессивных вейвлетов. Обобщение на случай разных вейвлетов для анализа и синтеза. Ослабление условия допустимости. Формула восстановления Морле.</p> <p>Тема 4. Свойства непрерывного вейвлет-преобразования. Линейность. Ковариантность относительно масштабирования и сдвига. Частотно-временная локализация. Изометрия между пространством анализируемых функций и пространством вейвлет-образов. Воспроизводящее ядро.</p> <p>Тема 5. Примеры вейвлет-функций. Действительные вейвлеты. Производные функции Гаусса. Комплексные (прогрессивные) вейвлеты. Вейвлет Морле.</p> <p>Тема 6. Методы визуализации результатов. Плоскость вейвлет-коэффициентов. Выбор шкалы по оси масштабов. Особенности представления вейвлет-преобразования в случае прогрессивных вейвлетов. Различные нормировки вейвлет-коэффициентов.</p> <p>Тема 7. Алгоритмы вычисления непрерывного вейвлет-преобразования. Квадратурная формула прямоугольников вычисления вейвлет-преобразования. Выбор минимального и максимального масштабов. Краевые эффекты. Оценка числа операций, требуемых для вычисления непрерывного</p>				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
<p>вейвлет-преобразования. Формула вычисления непрерывного вейвлет-преобразования на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье.</p> <p>Тема 8. Распределение энергии сигнала с точки зрения вейвлет-преобразования. Связь между частотой и масштабом. Локальный и интегральный вейвлет-спектры мощности сигнала. Связь между интегральным вейвлет-спектром и спектром Фурье. Определение длительности вейвлета. Локальный вейвлет-спектр как функция частоты.</p> <p>Тема 9. Частотная и амплитудная модуляции сигнала. Понятие скелета и хребта сигнала. Каноническое представление сигнала. Преобразование Гильберта. Понятие мгновенной частоты сигнала. Асимптотические сигналы. Алгоритм выделения скелета сигнала.</p> <p>Тема 10. Непрерывное вейвлет-преобразование в многомерном случае. Центральносимметричные вейвлеты. Двумерное непрерывное вейвлет-преобразование. Свойства непрерывного двумерного вейвлет-преобразования. Способы представления двумерного анизотропного вейвлет-преобразования. Примеры двумерных вейвлетов. Подлинно ориентированные (направленные) вейвлеты. Вейвлет Коши.</p> <p>Тема 11. Приложения двумерного непрерывного вейвлет-преобразования. Поточечный анализ. Применение направленных вейвлетов. Фильтрация в заданных направлениях. Масштабно-угловая мера. Выделение вращательно-дилатационных симметрий. Примеры анализа фрактальных множеств, квазирешеток и покрытий Пенроуза.</p>				
Вейвлет-базисы. Дискретное вейвлет-преобразование	0	0	14	17
<p>Тема 12. Понятие вейвлет-базиса. Параметризация базисных функций, отличие от непрерывного случая. Простейшие примеры базисных функций. Примеры вейвлет-базисов: базисы Хаара и Литтлвуда-Пэли (Шеннона).</p> <p>Тема 13. Кратно-масштабный анализ. Основные определения. Понятие</p>				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
<p>масштабирующей функции и масштабирующего соотношения. Масштабирующее соотношение в пространстве Фурье. Маски, соответствующие масштабирующей функции и вейвлету. Низкочастотный и высокочастотный фильтры. Основные соотношения кратно-масштабного анализа в терминах масок. Ослабление требований, накладываемых на масштабирующие функции. Вейвлеты Мейера. Тема 14. Ослабление требований, накладываемых на масштабирующие функции. Семейство вейвлетов Баттла-Лемарье. Понятие базиса Риса. В-сплайны. Процедура ортогонализации. Убывание вейвлетов Баттла-Лемарье на бесконечности. Тема 15. Вейвлеты с компактным носителем Добеши. Условие ортогональности масштабирующих функций с компактным носителем как полиномиальное уравнение относительно тригонометрических функций. Общее решение этого полиномиального уравнения для заданного числа обращающихся в нуль моментов вейвлета. Извлечение “квадратного корня” из положительного полинома с помощью леммы Риса. Достаточное условие для ортогональности базисных функций с компактным носителем. Связь между длиной носителя вейвлета Добеши и его гладкостью. Тема 16. Алгоритмы быстрого вейвлет-преобразования, связь с полосовым кодированием. Формулы анализа и синтеза. Способы определения проекции анализируемого сигнала на пространство самого высокого разрешения. Число операций для случая вейвлетов с компактным носителем. Формулы вейвлет-анализа/синтеза как свертки с высокочастотным и низкочастотным фильтрами. Квадратурные зеркальные фильтры (QMF filters). Тема 17. Применение дискретного вейвлет-преобразования для сжатия информации. Связь степени сжатия с числом обращающихся в нуль моментов. Выбор количества отбрасываемых коэффициентов при заданной допустимой погрешности.</p>				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
<p>Тема 18. Биортогональные базисы. Отсутствие симметрии в случае ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Кратномасштабные анализы в биортогональном случае. Формулы анализа-синтеза. Условие биортогональности масштабирующих функций в терминах масок. Связь между биортогональными вейвлетами и масштабирующими функциями. Симметрия биортогональных вейвлетов и масштабирующих функций с компактным носителем. Полиномиальное уравнение для масок биортогональных масштабирующих функций. Общее решение полиномиального уравнения. Связь между гладкостью основных вейвлетов и числом обращающихся в нуль моментов дуальных вейвлетов. Примеры биортогональных симметричных вейвлетов с компактным носителем, основанных на В-сплайнах.</p> <p>Тема 19. Вейвлет-базисы в многомерном случае. Сепарабельный случай. Двумерный кратномасштабный анализ как тензорное произведение одномерных кратномасштабных анализов. Двумерный алгоритм анализа-синтеза. Число вейвлетов в N-мерном случае. Несепарабельные вейвлет-базисы. Условие унитарности матрицы масок.</p> <p>Тема 20. Вейвлеты на отрезке. Проблема краевых эффектов и методы ее решения. Основные принципы построения вейвлет-базисов на отрезке: разделение вейвлетов и масштабирующих функций на граничные и внутренние; трансформация граничных вейвлетов и масштабирующих функций с целью сохранения числа обращающихся в нуль моментов, ортогональности и точного представления масштабирующими функциями полиномов вплоть до некоторой степени. Удовлетворение однородных граничных условий Дирихле и Неймана. Рассмотрение больших масштабов при одновременном учете обеих границ интервала.</p> <p>Тема 21. Вейвлет-пакеты. Понятие вейвлет-пакета. Параметризация функции, образующей вейвлет-пакет. Теорема о выборе базиса. Алгоритм вычисления коэффициентов вейвлет-пакета. Условие на</p>				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
бинарное дерево, соответствующее ортонормированному базису. Понятие ценовой функции и информационной энтропии. Алгоритм выбора оптимального базиса. Обобщение на двумерный случай.				
Применение вейвлет-базисов в численных методах	0	0	5	19
Тема 22. Метод Галеркина применительно к вейвлет-базисам. Схемы дискретизации времени. Представление решения в вейвлет-пространстве, зависимость убывания коэффициентов разложения от гладкости решения. Представление дифференциальных операторов в вейвлет-базисах: стандартное и нестандартное представления, случаи линейных и нелинейных операторов. Алгоритм динамической адаптации разрешения. Тема 23. Метод Петрова-Галеркина с использованием биортогональных базисов. Базисы, диагонализующие линейные дифференциальные операторы. Мономиальные дифференциальные операторы и сумма дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Двумерный и трехмерный случай. Гиперболические операторы. Удовлетворение граничным условиям. Тема 24. Вычисление матриц дифференциальных операторов в базисах с компактным носителем. Неэффективность численного определения элементов матриц дифференциальных операторов в вейвлет-базисах с компактным носителем. Точный алгоритм вычисления интегралов от произведения масштабирующих функций и их производных в случае компактного носителя. Линейные и квадратичные операторы. Тема 25. Многомерный случай. Удовлетворение граничным условиям типа Дирихле и Неймана, декомпозиция области. Тема 26. Вейвлет-базисы с нулевой дивергенцией или ротором. Понятие векторных вейвлетов. Основные соотношения. Обобщение на другие векторные дифференциальные операторы.				
Вейвлет-фреймы. Лифтинговая схема.	0	0	3	19

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
Вейвлеты второго поколения. Мультивейвлеты. Вейвлеты с матричным растяжением				
Тема 27. Вейвлет-фреймы. Принцип унитарного расширения. Понятие фрейма (frame). Неравенства, определяющие фрейм. Сжатый (tight) фрейм. Границы фрейма. Дуальные фреймы. Базисы Рисса, как частные случаи фреймов. Конечномерные примеры. Устойчивость разложений по фреймам к возмущениям коэффициентов разложения. Фреймы в случае вейвлетов. Принцип унитарного расширения (Unitary Extension Principle). Способы построения масок, расширяющих матрицу до унитарной. Примеры вейвлет-фреймов с компактным носителем. Тема 28. Лифтинговая схема. Вейвлеты второго поколения. Лифтинг – как схема построения вейвлетов (ортогональных, биортогональных), обладающих новыми полезными свойствами. Примеры. Вейвлеты второго поколения – неинвариантные относительно сдвига и/или масштабирования системы функций. Методы их построения с помощью лифтинга. Тема 29. Мультивейвлеты. Понятие мультивейвлета. Условия факторизации на матрицу низкочастотных масок. Преимущества, даваемые мультивейвлетами. Примеры. Тема 30. Вейвлеты с матричным растяжением. Условия, налагаемые на матрицу растяжения. Примеры матриц растяжения. Зависимость регулярности вейвлета от вида матрицы растяжения. Вейвлеты на шахматной сетке (quincunx lattice). Достаточность одного вейвлета в двумерном случае. Примеры.				
ИТОГО по 1-му семестру	0	0	34	72
ИТОГО по дисциплине	0	0	34	72